Universidad de Sucre
Visible para todos

TRABAJO PARA EL PRIMER CORTE

Cálculo I (Funciones Reales)

Programa de Ing. Agrícola

Prof. Juan Deavila

Observación: Se debe presentar el día 12 de Marzo. Se debe trabajar en grupos de mínimo 4 estudiantes y máximo 6 estudiantes. Recuerde que la calificación de este trabajo representa el 30 % de la nota final para el primer corte.

`Definición de función y funciones reales`

1. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 7, 9\}$. Determine cuales de los siguientes conjuntos representan la gráfica de una función real $f : A \to B$.

   a) $\{(1, 4), (3, 9), (2, 7)\}$
   b) $\{(1, 7), (3, 4), (1, 9)\}$
   c) $\{(3, 7), (2, 4), (1, 9)\}$
   d) $\{(1, 9), (2, 4)\}$
   e) $\{(3, 7), (2, 9), (1, 4), (3, 9)\}$
   f) $\{(1, 7), (3, 7), (2, 7)\}$

2. La gráfica de cierta función es el conjunto $\{(2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 1)\}$. Determine el dominio y el rango de dicha función. Además, represente la gráfica de dicha función en el plano cartesiano.

3. Sea f la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x + 1$. Calcular $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $1/f(2)$ y para $a, b \in \mathbb{R}$, calcular $f(a + b)$, $f(a) + f(b)$, $f(a)f(b)$ y $f(ab)$.

4. Sea f la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = |x - 3| + |x - 1|$. Calcular: $f(0)$, $f(2)$ y $f(-2)$. Determinar los valores reales que puede tomar t para que se cumpla la igualdad $f(t + 2) = f(t)$.

5. Sea f la función definida como sigue: $f(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$; $f(x) = 2$ para todo $x \in (1, 2]$. Es decir, f es la función definida por partes de la siguiente forma:

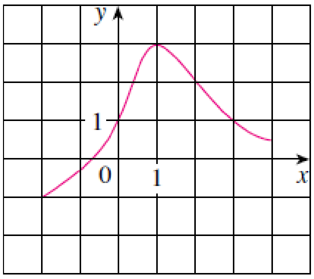
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0, 1] \\ 2 & si \quad x \in (1, 2] \end{cases}$$

   a) Determine el dominio de f.
   b) Trazar la gráfica de la función f.
   c) Sea g la función definida por $g(x) = f(2x)$. Determinar el dominio de g y dibujar su gráfica.
   d) Sea h la función definida por $h(x) = f(x - 2)$. Determinar el dominio de h y dibuhar su gráfica.
   e) Sea k la función definida por $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$. Determinar el dominio de h y dibuhar su gráfica.

6. Sean f y g funciones polinomiales definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$. Las gráficas de estas dos funciones se cortan en tres puntos. Dibujar una parte suficiente de sus gráficas para ver cómo se cortan.

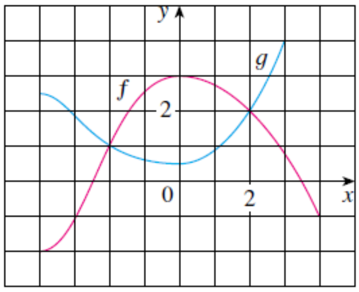
7. Sea dá la gráfica de la función f.

   a) Establezca el valor de $f(1)$
   b) Estime el valor de $f(-1)$
   c) ¿Para que valores de x se tiene que $f(x) = 1$?
   d) estime los valores de x para los que $f(x) = 0$
   e) Establezca el dominio y el rango de f.
   f) ¿ En qué intervalo f es creciente?.
   g) ¿ En qué intervalo f es decreciente?.

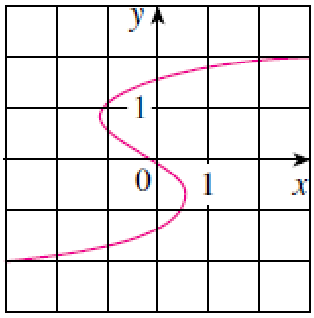


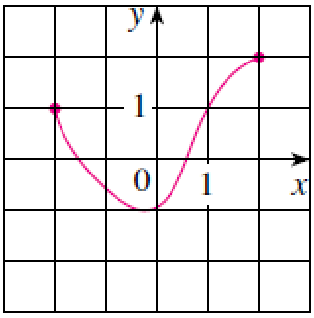
8. Se proporcionan las gráficas de las funciones f y g.

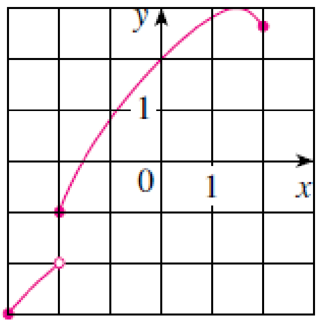
   a) Establezca los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
   b) ¿Para que valores de x se tiene que $f(x) = g(x)$?
   c) estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$
   d) Establezca el dominio y el rango de f.
   e) Establezca el dominio y el rango de g.
   f) ¿ En qué intervalo f es decreciente?.
   g) ¿ En qué intervalo g es decreciente?.

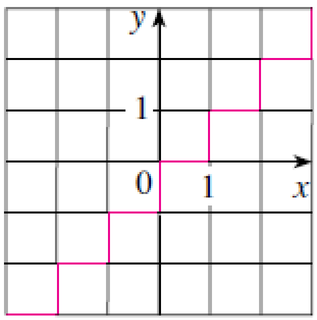


9. Determine si la curva dada en cada plano cartesiano representa la gráfica de una función. Si lo es, dé el dominio y el rango de la función.









10. Sea f la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f(x) = x - x^2$. Determine $f(2+h)$, $f(x+h)$ y $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ donde $h \in \mathbb{R}$.

11. Sea f la función definida para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Determine $f(2+h)$, $f(x+h)$ y $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ donde $h \in \mathbb{R}$.

12. Encuentre el dominio de la función f definida por:

   a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$
   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 6}$
   c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = |x| + x$

f) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

h) $f(x) = \sqrt{|x^3|}$

13. Utilice una tabla de valores para dibujar la gráfica de la función y determine su dominio y su rango.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = 5 - x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $f(z) = |3z + 2|$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

g) $f(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x - 3)}{x^2 - x - 6}$

h) $\phi(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq 3 \\ 2 & si \quad x < 3 \end{cases}$

i) $H(x) = \begin{cases} 5 & si \quad x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 10 & si \quad 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & si \quad x \geq 5 \end{cases}$

j) $g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & si \quad x < 0 \\ 3x + 1 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

k) $G(t) = [|t - 4|]$

14. La función U definida por

$$U(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

es llamada función escalón (o salto) unitario. Defina las funciones F, G y H por $F(x) = U(x - 1)$, $G(x) = U(x) - 1$ y $H(x) = U(x) - U(x - 1)$ respectivamente y dibuje sus gráficas.

15. Considerando la función escalon unitario, defina las funciones F, G y H por $F(x) = x \cdot U(x)$, $G(x) = (x + 1) \cdot U(x+)$ y $H(x) = (x + 1) \cdot U(x + 1) - x \cdot U(x)$ respectivamente y dibuje sus gráficas.

16. Usando la gráfica de la función f definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Realizar las gráficas de las funciones g, h, q, r y s definidas por:

a) $g(x) = \sqrt{x} + 2$

b) $h(x) = -\sqrt{x}$

c) $q(x) = \sqrt{x - 2}$

d) $r(x) = \sqrt{x + 3}$

e) $s(x) = \sqrt{2x}$

f) $g(x) = 2 - \sqrt{x - 3}$

17. Dadas las funciones f, g y h definidas por $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 1$ y $h(x) = x$ respectivamente. Determinar:

a) $f(g(1))$

b) $g(f(1))$

c) $g(f(0))$

d) $f(g(-4))$

e) $f(h(4))$

f) $f(g(h(1)))$

g) $f \circ g$

h) $g \circ f$

i) $g \circ h$

j) $f \circ f$

k) $h \circ f$

l) $f \circ h \circ g$

18. En un estanque en calma, se deja caer un objeto produciendo ondas en forma de círculos concéntricos. El radio (en pies) de la onda externa viene dado por la función r definida por $r(t) = 0{,}6t$, donde t es el tiempo en segundos transcurrido desde que el objeto toca el agua. El área del círculo viene dado por la función A definida por $A(r) = \pi r^2$. Determinar la función $A \circ r$. Determinar e interpretar el valor $(A \circ r)(5)$.

19. Determinar si la función q definida por $q(x) = 4x - x^2$ es par o impar o ninguna de estas.

20. El peso aproximado del cerebro de una perona es directamente proporcional al peso del cerebro de su cuerpo. Una persona que pesa 150 libras tiene un cerebro cuyo peso aproximado es de 4 libras. Desarrollar lo siguiente:

    a) Encuentre un modelo matemático que exprese el peso aproximado del cerebro como una función del peso de la persona.

    b) Determine el peso aproximado del cerebro de una persona que pesa 176 libras.

21. En un lago, un pez grande se alimenta de un pez mediano y la población del pez grande es una función f que depende del número x de peces de tamaño mediano en el lago. A su vez, el pez mediano se alimenta de un pez pequeño, y la población de peces medianos es una función g que depende del número w de peces pequeños en el lago. Si

$$f(x) = \sqrt{20x}, \quad \text{y} \quad g(w) = \sqrt{w} + 5000$$

    haga lo siguiente:

    a) Encuentre un modelo matemático (una funcón) que exprese la población de peces grandes como una función del número de peces pequeños del lago.

    b) Determine el número de peces grandes cuando el lago contiene 9 millones de peces pequeños.

`Límites y continuidad de funciones reales`

22. Determine los siguientes límites (si existen):

    a) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ *g*) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$ *j*) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5x+7}{x}$

    b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$ *e*) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{2-\sqrt{8-x}}$ *h*) $\displaystyle\lim_{x\to 9} \frac{x^3-729}{\sqrt{x}-3}$ *k*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

    c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$ *f*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{2-x}}{x-1}$ *i*) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x}-1}{2-\sqrt{x+3}}$ *l*) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-81}$

23. Sea f la función definida por $f(x) = x^2 + x + 1$. Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}.$$

24. ¿Es adecuado preguntarse por el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$?. Justifique su respuesta.

25. Determine los siguientes límites:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ *b*) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{9-x^2}$ *c*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{|x-2|}$ *d*) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6}{(x-2)^3}$

26. Hallar las asíntotas verticales de cada una de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x-2}$ *b*) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ *c*) $f(t) = \dfrac{x^2}{x^6-x^2}$ *d*) $f(x) = \dfrac{5}{x^2-x+12}$

27. ¿ Podemos encontrar un número real a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2+ax+a+3}{x^2+x-2}$$

    exista?. Si es así, encuentre los valores de a y del límite.